

Testing the null of difference stationarity against the alternative of a stochastic unit root

A new test based on multivariate STUR

N. Muriel¹ G. González–Farías²

¹Departamento de Métodos Cuantitativos
CUCEA, Universidad de Guadalajara

²Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.
Unidad Monterrey

Noviembre 2018

Con el apoyo del proyecto CONACYT CB252996.

nelson.muriel@gmail.com

Raíces Unitarias

AR Estacionario

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Raíces Unitarias

AR Estacionario

$$X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \varepsilon_{t-i} + \phi^t X_0$$

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Raíces Unitarias

AR Estacionario

$$X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \varepsilon_{t-i} + \phi^t X_0$$

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

$$|\phi| < 1$$

Raíces Unitarias

AR Estacionario

$$X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \varepsilon_{t-i} + \phi^t X_0$$
$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Raíz Unitaria

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Raíces Unitarias

AR Estacionario

$$X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \varepsilon_{t-i} + \phi^t X_0$$
$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Raíz Unitaria

$$X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i} + X_0$$
$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Raíces Unitarias

AR Estacionario

$$X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \varepsilon_{t-i} + \phi^t X_0$$

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

$$\rho_{t,t+h} = \phi^h$$

Raíz Unitaria

$$X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i} + X_0$$

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

$$\rho_{t,t+h} = \sqrt{\frac{t}{t+h}}$$

Raíces Unitarias

AR Estacionario

$$\hat{X}_{t+h} = \phi^h X_t$$

$$\text{ECMP} = \text{Var} \left(\sum_{j=0}^{h-1} \phi^j \varepsilon_{t+h-j} \right)$$

Raíz unitaria

$$\hat{X}_{t+h} = X_t$$

$$\text{ECMP} = \text{Var} \left(\sum_{j=0}^{h-1} \varepsilon_{t+h-j} \right)$$

Raíces Unitarias

AR Estacionario

$$\hat{X}_{t+h} = \phi^h X_t$$

$$\text{ECMP} = \sum_{j=0}^{h-1} \phi^{2j} \text{Var}(\varepsilon_{t+h-j})$$

Raíz unitaria

$$\hat{X}_{t+h} = X_t$$

$$\text{ECMP} = \sum_{j=0}^{h-1} \text{Var}(\varepsilon_{t+h-j})$$

Raíces Unitarias

AR Estacionario

$$\widehat{X}_{t+h} = \phi^h X_t$$

$$\text{ECMP} = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1 - \phi^{2h}}{1 - \phi^2}$$

Raíz unitaria

$$\widehat{X}_{t+h} = X_t$$

$$\text{ECMP} = h\sigma_\varepsilon^2$$

Raíces Unitarias

AR Estacionario

$$\hat{X}_{t+h} = \phi^h X_t$$

$$\text{ECMP} = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{1 - \phi^2}$$

Raíz unitaria

$$\hat{X}_{t+h} = X_t$$

$$\text{ECMP} = h\sigma_\varepsilon^2$$

El paradigma de Dickey y Fuller

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\mathcal{H}_0: \phi = 1 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1: \phi < 1$$

El paradigma de Dickey y Fuller

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + u_t$$

$$\mathcal{H}_0: \delta = 0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1: \delta < 0$$

El paradigma de Dickey y Fuller

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + u_t$$

$$\mathcal{H}_0: \delta = 0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1: \delta < 0$$

Regresión lineal ...

$$\hat{\delta} = \frac{\sum \Delta X_t X_{t-1}}{\sum X_{t-1}^2}$$

El paradigma de Dickey y Fuller

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + u_t$$

$$\mathcal{H}_0: \delta = 0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1: \delta < 0$$

Regresión lineal ...

$$\hat{\delta} = \frac{\sum u_t X_{t-1}}{\sum X_{t-1}^2}$$

El paradigma de Dickey y Fuller

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + u_t$$

$$\mathcal{H}_0: \delta = 0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1: \delta < 0$$

Regresión lineal ...

$$T\hat{\delta} = \frac{T^{-1} \sum u_t X_{t-1}}{T^{-2} \sum X_{t-1}^2}$$

El paradigma de Dickey y Fuller

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + u_t$$

$$\mathcal{H}_0: \delta = 0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1: \delta < 0$$

Distribución de Dickey y Fuller

$$T\hat{\delta} = \frac{T^{-1} \sum u_t X_{t-1}}{T^{-2} \sum X_{t-1}^2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{Bajo } \mathcal{H}_0} \frac{\int_0^1 W dW}{\int_0^1 W dt}$$

El paradigma de Dickey y Fuller

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \delta X_{t-1} + u_t$$
$$\mathcal{H}_0: \delta = 0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1: \delta < 0$$

Distribución de Dickey y Fuller

$$T\hat{\delta} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{Bajo } \mathcal{H}_0} \frac{\int_0^1 W dW + A}{B}$$

El paradigma de Dickey y Fuller

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \delta X_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta X_{t-j} + u_t$$

$$\mathcal{H}_0: \delta = 0 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1: \delta < 0$$

Distribución de Dickey y Fuller

$$T \hat{\delta} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{Bajo } \mathcal{H}_0} \frac{\int_0^1 W dW + A}{B}$$

Problemas...

- ▶ Determinación de la tendencia
- ▶ Supuestos sobre la innovación u_t
- ▶ Poder bajo
- ▶ Linealidad

Raíces Unitarias Estocásticas

Leybourne et. al (1996a, 1996b)

El modelo es

$$y_t^* = \rho_t y_{t-1}^* + u_t,$$

$$u_t \sim N(0, \sigma_u^2),$$

$$y_t^* = y_t - \lambda_t,$$

$$\lambda_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \frac{t(t+1)}{2},$$

$$\rho_t \sim i.i.d.(0, \omega^2),$$

Raíces Unitarias Estocásticas

Leybourne et. al (1996a, 1996b)

El modelo es

$$y_t^* = \rho_t y_{t-1}^* + u_t,$$

$$u_t \sim N(0, \sigma_u^2),$$

$$y_t^* = y_t - \lambda_t - \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i},$$

$$\lambda_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \frac{t(t+1)}{2},$$

$$\rho_t \sim i.i.d.(0, \omega^2),$$

Raíces Unitarias Estocásticas

McCabe and Tremayne (1995)

El modelo es

$$y_t^* = \rho_t y_{t-1}^* + u_t,$$

$$u_t \sim N(0, \sigma_u^2),$$

$$y_t^* = y_t - \lambda_t - \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i},$$

$$\lambda_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \frac{t(t+1)}{2},$$

$$\rho_t = \rho_{t-1} + \nu_t,$$

Raíces Unitarias Estocásticas

Leybourne et al. (1996a, 1996b)

Equivale a escribir

$$y_t^* = \sum_{j=1}^p \phi_{j,t} y_{t-j}^* + u_t,$$

$$\phi_0 = 0, \phi_{p+1} = 0,$$

$$\phi_{i,t} = \phi_i - \rho_t \phi_{i-1}$$

Es un AR(p+1) con coeficientes aleatorios; pero ... ρ_t

Raíces Unitarias Estocásticas

- ▶ Granger and Swanson (1997)
- ▶ Gourieroux and Robert (2006)
- ▶ Franq et al. (2008)
- ▶ Lieberman and Phillips (2014, 2017)
- ▶ Yoon (2016)

Generalización

Muriel and González-Farías (2018)

- ▶ Permitir una estructura de covarianzas libre para el vector $\Phi_t = (\phi_{1t}, \dots, \phi_{pt})^T$
- ▶ El modelo más atractivo: Equivalente, en distribución, al modelo heterocedástico DAR(p) de Ling (2007)
- ▶ Aumentar el poder de la prueba

Generalización

Muriel and González-Farías (2018)

- ▶ Permitir una estructura de covarianzas libre para el vector $\Phi_t = (\phi_{1t}, \dots, \phi_{pt})^T$
- ▶ El modelo más atractivo: Equivalente, en distribución, al modelo heterocedástico DAR(p) de Ling (2007)
- ▶ Aumentar el poder de la prueba

$$y_t = \Phi_t^T X_{t-1} + u_t,$$

$$X_t = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-p+1})^T,$$

$$\Phi_t \sim i.i.d.(\Phi, \Sigma),$$

$$\Phi^T \mathbf{1} = 1.$$

Generalización

Muriel and González-Farías (2018)

Nos basamos en el score para $\mathcal{H}_0: \alpha = \text{vec}(\Sigma) = 0$,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\frac{\sigma^{-4}}{2} \sum_{t=p+1}^T Z_{t-1}(\varepsilon_t^2 - \sigma^2) + \frac{\sigma^{-4}}{2} \sum_{t=p+1}^T W_{t-1}(\varepsilon_t^2 - \sigma^2),$$

Generalización

Muriel and González-Farías (2018)

Nos basamos en el score para $\mathcal{H}_0: \alpha = \text{vec}(\Sigma) = 0$,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\frac{\sigma^{-4}}{2} \sum_{t=p+1}^T Z_{t-1}(\varepsilon_t^2 - \sigma^2) + \frac{\sigma^{-4}}{2} \sum_{t=p+1}^T W_{t-1}(\varepsilon_t^2 - \sigma^2),$$

$$\text{vec}(\Sigma) = K^T \text{vech}(\Sigma), \quad Z_t = K \text{vec}(X_{t-1} X_{t-1}^T),$$

$$W_t = X_{t-1}^T \xi K \text{vec}(I),$$

Generalización

Muriel and González-Farías (2018)

Nos basamos en el score para $\mathcal{H}_0: \alpha = \text{vec}(\Sigma) = 0$,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\frac{\sigma^{-4}}{2} \sum_{t=p+1}^T Z_{t-1}(\varepsilon_t^2 - \sigma^2) + \frac{\sigma^{-4}}{2} \sum_{t=p+1}^T W_{t-1}(\varepsilon_t^2 - \sigma^2),$$

$$\text{vec}(\Sigma) = K^T \text{vech}(\Sigma), \quad Z_t = K \text{vec}(X_{t-1} X_{t-1}^T),$$

$$W_t = X_{t-1}^T \xi K \text{vec}(I),$$

Generalización

Muriel and González-Farías (2018)

Nos basamos en el score para $\mathcal{H}_0: \alpha = \text{vec}(\Sigma) = 0$,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\frac{\sigma^{-4}}{2} \sum_{t=p+1}^T Z_{t-1} (\varepsilon_t^2 - \sigma^2),$$

$$\text{vec}(\Sigma) = K^T \text{vech}(\Sigma), \quad Z_t = K \text{vec}(X_{t-1} X_{t-1}^T),$$

$$W_t = X_{t-1}^T \xi K \text{vec}(I),$$

El estadístico de prueba

Muriel and González-Farías (2018)

Después de trabajar esta expresión...

$$H_T = T^{-3/2} \hat{\sigma}^{-2} \hat{\kappa}^{-1} \hat{\gamma} \sum_{t=p+2}^T \left(\sum_{j=p+1}^{t-1} \hat{u}_j \right)^2 (\hat{u}_t^2 - \hat{\sigma}^2),$$

La distribución asintótica

Muriel and González-Farías (2018)

Theorem

The asymptotic distribution under H_0 of the statistic H_T is given by

$$\gamma \left(\int_0^1 G_1^2(u) dG_2(u) - G_2(1) \int_0^1 G_1^2(u) du \right),$$

where

$G_1(u) = W_1(u) - uW_1(1) + 6u(1-u) \left(W_1(u)/2 - \int_0^1 W_1(u) du \right),$

$G_2(u) = \psi W_1(u) + (1 - \psi^2)^{1/2} W_2(u),$ and $W_1(u)$ and $W_2(u)$ are independent standard Brownian motions.

El poder

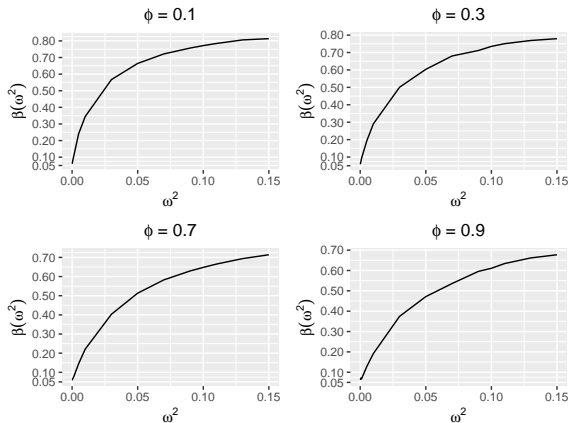


Figura: Poder con $p = 2$, $T = 100$ y parámetros $(\phi, 1 - \phi)$

El poder

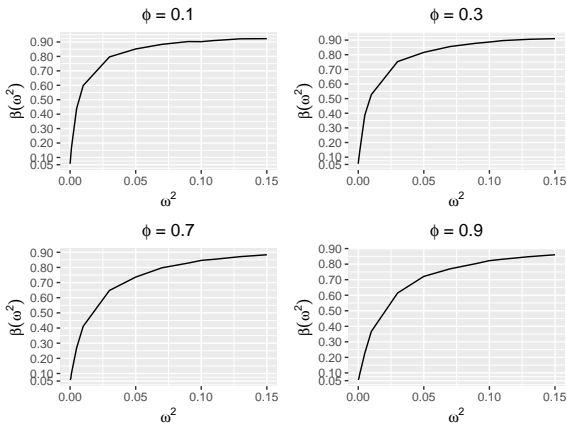


Figura: Poder con $p = 2$, $T = 200$ y parámetros $(\phi, 1 - \phi)$

El poder

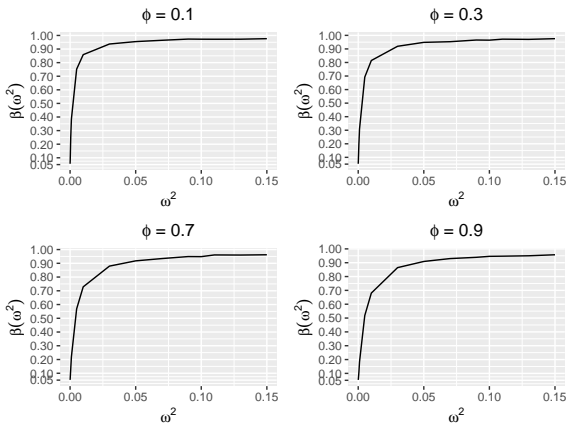


Figura: Poder con $p = 2$, $T = 500$ y parámetros $(\phi, 1 - \phi)$

El poder

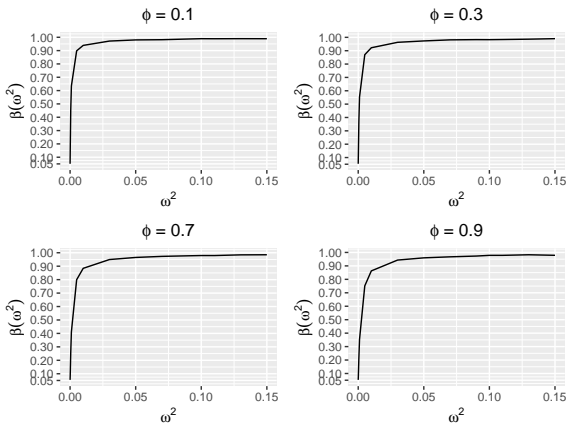


Figura: Poder con $p = 2$, $T = 1000$ y parámetros $(\phi, 1 - \phi)$

Comentarios Finales

- ▶ La prueba depende, crucialmente, del hecho de que el Proceso de Sumas Parciales (PSP) de los residuales de una regresión sobre una tendencia polinomial tienen la distribución límite un puente Browniano.
- ▶ En particular, si la tendencia es lineal, el PSP satisface

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \hat{\varepsilon}_i \Rightarrow W_t - tW_1 + 6t(1-t) \left(\frac{1}{2} - \int_0^1 W_s ds \right),$$

Comentarios Finales

- ▶ Esto, a su vez, depende del principio de invarianza de Donsker

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \varepsilon_i \Rightarrow W_t,$$

- ▶ Por ello, podemos generalizar el resultado refiriéndonos a Herrndorf(1985)
- ▶ En particular, es válida cuando $\{\varepsilon_t\}$ es centrada, de varianza finita variance, y satisface
 1. $\exists 0 < \sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=1}^n \varepsilon_t \right)^2 \right] / n,$
 2. $\exists \beta > 2$ tal que $\sup_t \mathbb{E} [|\varepsilon_t|^\beta] < \infty,$
 3. the process is α -mixing con coeficientes de mixing $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}},$
 4. $\sum_k \alpha_k^{1-2/\beta} < \infty.$

Comentarios Finales

- ▶ Si u_t es estacionario, entonces $\sigma^2 = \mathbb{E} [u_0^2] + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} [u_0 u_j]$,
- ▶ Estas condiciones excluyen procesos persistentes estacionarios (LRD)
- ▶ Aún así, la familia de innovaciones $\{u_t\}$ para las que el resultado aplica es amplia incluyendo, por ejemplo, los modelos GARCH y los LMSV
- ▶ El tamaño puede distorsionarse
- ▶ Pero ... importa?

Referencias I



Dickey, D. A. and Fuller, W. A.

Distributions of estimators for autoregressive time series with a unit root
Journal of the American Statistical Association, 74:427–431, 1979.



Leybourne, S, McCabe, B and Tremayne, A

Can Economic Time Series Be Differenced to Stationarity?
Journal of Business & Economic Statistics, 14(4):435-446, 1986



Leybourne, S, McCabe, B and Mills, T

Randomized unit root processes for modelling and forecasting financial time series: Theory and applications
Journal of Forecasting, 15(3):253-270, 1996



McCabe, B and Tremayne, A

Testing a time series for difference stationarity
The Annals of Statistics, 23(3):1015-1028, 1995



Granger, C. and Swanson, N.

An introduction to stochastic unit-root processes
Journal of Econometrics, 89(1): 35–62, 1997



Gourieroux, C. and Robert, C.

Stochastic unit root models
Econometric Theory, 22(6):1052–1090, 2006



Franq, C., Marakova, S. and Zakoïan, J.-M.,

A class of stochastic unit-root bilinear processes: mixing properties and unit-root tests.
Journal of Econometrics, 142:312–326, 2008



Lieberman O., and Phillips, P.C.

Norming rates and limit theory for some time varying coefficient autoregressions
Journal of Time Series Analysis, 35(6):592–623, 2014

Referencias II



Yoon, G

Stochastic unit root processes: maximum likelihood estimation and new lagrange multiplier and likelihood ratio tests

Economic Modeling, 52:725–732, 2016



Lieberman O., and Phillips, P.C.,

A multivariate stochastic unit root model with an application to derivative pricing

Journal of Econometrics, 196(1):99–110, 2017



Muriel, N. and González-Farías, G.

Testing the null of difference stationarity against the alternative of a stochastic unit root: A new test based on multivariate STUR

Econometrics and Statistics, 7:46-62, 2018