

El Modelo oculto de Markov y sus aplicaciones en Economía y Finanzas

Workshop on Econometrics and Data Science
CIMAT
Monterrey, NL

José Luis Batún Cutz

Universidad Autónoma de Yucatán

8 y 9 de Noviembre de 2018



Contenido

- 1 El proceso de Markov escondido
 - Cadena de Markov
 - El modelo de Markov Escondido
 - Ejemplos
- 2 Las Series de tiempo Financieras
- 3 Aplicaciones del HMM
- 4 Bibliografía



- 1 El proceso de Markov escondido
 - Cadena de Markov
 - El modelo de Markov Escondido
 - Ejemplos

- 2 Las Series de tiempo Financieras

- 3 Aplicaciones del HMM

- 4 Bibliografía



Cadena de Markov

Definición

Una sucesión de variables aleatorias discretas $\{S_t : t \in \mathbb{N}\}$ es una cadena de Markov si

$$P[S_{t+1} | S_t, S_{t-1}, \dots, S_1] = P[S_{t+1} | S_t]$$

para todo $t \in \mathbb{N}$.

Cada v.a. S_t toma valores en el conjunto de estados $S = \{1, 2, \dots, m\}$. Una cadena de Markov es homogénea si las probabilidades de transición

$$P[S_{u+t} = j | S_t = i] = p_{ij}(u)$$

no dependen de t .



Cadena de Markov homogénea

Una cadena de Markov homogénea con m estados está determinada por la matriz de probabilidades de transición $P = (p_{ij})$ de tamaño $m \times m$ dada por

$$p_{ij} = P[S_{u+1} = j | S_u = i]$$



- 1 El proceso de Markov escondido
 - Cadena de Markov
 - El modelo de Markov Escondido
 - Ejemplos

2 Las Series de tiempo Financieras

3 Aplicaciones del HMM

4 Bibliografía



El Modelo escondido de Markov

Definición

Sea $\{S_t : t \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov con m estados. El proceso $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ es un proceso de Markov Escondido con m estados (HMM), si

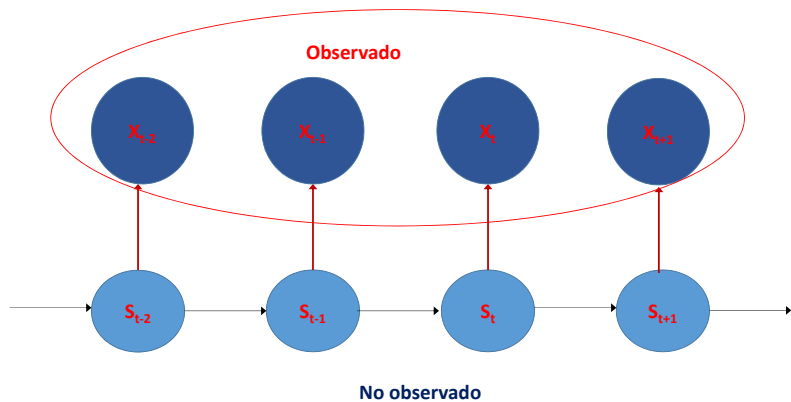
$$P[S_t | S^{(t-1)}] = P[S_t | S_{t-1}] \text{ para } t = 2, 3, \dots$$

$$P[X_t | X^{(t-1)}, S^{(t)}] = P[X_t | S_t] \text{ para } t \in \mathbb{N}$$

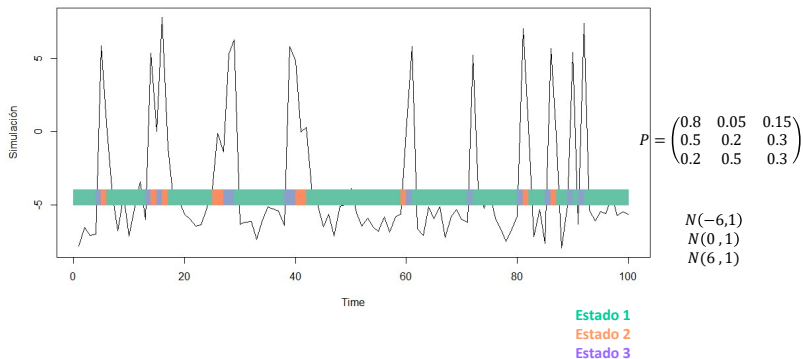
donde $S^{(t-1)} = (S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_1)$ y $X^{(t)} = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_1)$



El Modelo escondido de Markov



El Modelo escondido de Markov



- 1 El proceso de Markov escondido
 - Cadena de Markov
 - El modelo de Markov Escondido
 - Ejemplos

2 Las Series de tiempo Financieras

3 Aplicaciones del HMM

4 Bibliografía



Markov Switching Variance Model

$$y_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_1^2 S_{1t} + \sigma_2^2 S_{2t}$$

con

$$S_{kt} = \begin{cases} 1 & \text{si } S_t = k \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$k = 1, 2$ y

$$P[S_t = j | S_{t-1} = i] = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\sum_{j=1}^2 p_{ij} = 1, \quad \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$



AR Switching Model

$$y_t = C_{S_t} + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

con S_t una cadena de Markov con dos estados $\{1, 2\}$, matriz de transición

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$y \ \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2).$$



Estimación

- Determinación del número de estados de la cadena de Markov: AIC, BIC, pruebas secuenciales y razón de verosimilitud.
- Estimación de los parámetros del modelo. Máxima Verosimilitud, con algoritmo de Baum-Welch (EM)
- Estimación de la secuencia de estados que originó la muestra observada: Viterbi ALgorithm



GARCH o HMM?

Para una serie de tiempo financiera $\{X_t\}$, los log-rendimientos se definen como

$$r_t = \text{Log}(X_t) - \text{Log}(X_{t-1}) = \text{Log}\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right)$$

Ambos modelos reproducen los hechos estilizados de las series de tiempo financieras.

HMM es mejor que GARCH cuando la frecuencia de muestreo de los datos no es diaria, pues el efecto ARCH puede no estar presente o es muy débil.



Aplicaciones del HMM

- Volatility in Growth rate of real GDP. Bhar(2004)(ventaja sobre el GARCH)
- Forecasting oil price trends using wavelets and hidden Markov Models. de Sousa e Silva (2010)
- Hidden Markov Model in Finance 2007, 2014



Mas acerca del HMM

- Las variables observables pueden ser discretas, como por ejemplo ventas de un artículo.
- La cadena de Markov se puede considerar en tiempo continuo.
- Modelos Semi-Markov
- Modelar series de tiempo con datos faltantes o datos faltantes debido a dias feriados



Bibliografía

Bhar, R., Hamori, S. (2004) Hidden Markov Models, Applications to Financial Economics. Kluwer Academic Publishers, New York.

Mamon, R. And Elliott R. (2014) Hidden Markov Models in Finance. Further Developments and Applications, Vol II. Springer, New York.

Mamon, R. And Elliott R. (2007) Hidden Markov Models in Finance. Springer, New York.

Zucchini, W., MacDonald I., Langrock, R. (2016) Hidden Markov Models for Time Series, An Introduction using R. Chapman & Hall, Second Edition.



Bibliografía

Rydén, T., Teräsvirta, T. and Åsbrink, S., Stylized facts of daily return series and the Hidden Markov Model. *J Applied Econometrics*, 1988, 13, 217-244.

Cheng-Der, F (2003) SPRT and CUSUM in Hidden Markov Models, *Statistica Sinica*, Vol 31, No. 3, 942-947



Agradecimientos

Agradezco el apoyo y la invitación del comité organizador del evento y del proyecto de Ciencia Básica *Modelos con estructuras de dependencia II*, No CB-2015-252996.

